

CONDICIONES DE BORDES TRANSPARENTES EN LA GENERACION NUMERICA DE SISMOGRAMAS

Diana Comte S. y Humberto Fuenzalida P.
Departamento de Geofísica, Universidad de Chile.
Casilla 2777, Santiago, Chile.

RESUMEN

Se informa acerca de la implementación de un modelo numérico simple capaz de generar sismogramas sintéticos. El modelo, propuesto por Alterman y Karal (1968) es descrito en detalle, particularmente su procedimiento de cálculo el que en el artículo original no aparece suficientemente explícito. El modelo está constituido por una capa horizontal sobre un semiespacio y posee simetría cilíndrica. La fuente compresional se extiende en una región finita, rodeada por dos contornos cerrados en el dominio computacional, a través de los cuales la información es transferida al resto del espacio.

Para evitar reflexiones espurias procedentes de los bordes de la región de cálculo se introducen las condiciones de borde sugeridas por Smith (1974). Ellas muestran ser eficientes, al permitir identificar fases que de otro modo serían encubiertas por dichas reflexiones.

ABSTRACT

Transparent boundary conditions in the numerical generation of seismograms

The article reports on the implementation of a numerical model able to generate synthetic seismograms. The finite difference model originally proposed by Alterman and Karal (1968) is described in detail, particularly with reference to the computational procedure which is not completely clear in their article. The model has a homogeneous horizontal layer over a half space with cylindrical symmetry. The compressional source extends over a finite region surrounded by two closed contours within the computational domain and through which information is transferred to the rest of the space.

To avoid spurious reflections from the borders transparent boundary conditions suggested by Smith (1974) are introduced. They showed to be very efficient in allowing the identification of phases which otherwise would be masked by such reflections.

1. INTRODUCCION

Los sismogramas sintéticos constituyen una importante herramienta en Sismología, motivo por el cual, en las últimas décadas ha habido una proliferación de métodos para obtenerlos, los que varían en grados de precisión y facilidades de implementación computacional.

De las numerosas técnicas disponibles para este propósito, el método de diferencias finitas es uno de los más usados. Las ecuaciones de movimiento que describen la propagación de ondas en un medio elástico son aproximadas por ecuaciones en diferencias finitas, las que pueden ser resueltas en una malla espacial discreta mediante procedimientos numéricos. En este artículo se da cuenta de las primeras experiencias en un esfuerzo por montar un modelo de este tipo.

Los métodos de diferencias finitas pueden ser clasificados en dos amplias categorías: explícitos e implícitos. Los esquemas explícitos simulan la ecuación de propagación determinando el movimiento de cada

punto de la malla en un instante de tiempo dado exclusivamente en función de los movimientos previamente determinados en tiempos anteriores. Por otra parte, los esquemas implícitos determinan simultáneamente el movimiento en todos los puntos de la malla para un instante de tiempo dado a partir de los valores conocidos en tiempos anteriores a través de la inversión de la matriz correspondiente.

En ambos esquemas las ecuaciones son resueltas recursivamente en el tiempo como un problema de valor inicial para el movimiento en un medio excitado por una perturbación (fuente).

De las dos categorías, el esquema explícito es computacionalmente más económico y es el empleado en el presente trabajo.

Los problemas de propagación de ondas son generalmente resueltos para medios infinitos, sin embargo, la resolución de dichas ecuaciones por métodos numéricos obliga el uso de fronteras artificiales, las que introducen reflexiones espurias en los sismogramas sintéticos. El presente trabajo ilustra cómo dichas reflexiones se pueden anular implementando las condiciones de borde propuestas por Smith (1974) que corresponden a la superposición de dos soluciones, una de las cuales impone desplazamiento normal, mientras la segunda impone desplazamiento tangencial y tensiones normales nulas en la frontera.

2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Se utiliza un modelo desarrollado por Alterman y Karal (1968) con simetría axial de una capa horizontal elástica, homogénea e isotrópica sobre un semi-espacio de las mismas características; sobre el eje del modelo se ubica una fuente puntual de ondas compresionales.

Las densidades y constantes elásticas en la capa y en el semi-espacio están representadas por ρ_1, λ_1, μ_1 y ρ_2, λ_2, μ_2 , respectivamente. La profundidad de la interfaz y de la fuente son z_1 y z_f .

La ecuación de propagación de ondas en un medio elástico homogéneo e isotrópico está dada por:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

donde $\vec{u} = \vec{u}(r, z, t)$ es el vector desplazamiento.

Escribiendo la ecuación (1) en coordenadas cilíndricas, en función de los desplazamientos radiales y verticales u, w , se obtiene:

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial r} \right] + \left(\frac{v_s}{v_c} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial r} \right] = \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2a)$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} \right] + \left(\frac{v_s}{v_c} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] = \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2b)$$

donde v_c y v_s corresponden a las velocidades de la onda P y S, respectivamente.

Las ecuaciones (2a) y (2b) no están definidas para $r = 0$, por lo tanto es necesario derivar las ecuaciones válidas para el eje de simetría.

Debido a la continuidad del medio elástico, el desplazamiento radial u es nulo a lo largo del eje de simetría, por lo que en este caso la ecuación (2a) se reduce a:

$$u = 0, \quad (3a)$$

Aplicando la regla de L'Hôpital para $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z}$ y $\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}$, la ecuación (2b) adopta la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \left(\frac{v_s}{v_c} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2 \left[1 - \left(\frac{v_s}{v_c} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} = \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3b)$$

Las condiciones de borde son determinadas imponiendo tensiones que se anulan en la superficie libre, y tensiones y desplazamientos continuos en la interfaz.

De este modo las condiciones de borde para la superficie libre $z = 0$ están dadas por:

$$\left(\frac{\partial u^1}{\partial r} + \frac{1}{r}u^1 + \frac{\partial w^1}{\partial z}\right) - 2\left(\frac{v_s^1}{v_c^1}\right)^2 \left[\frac{1}{r}u^1 + \frac{\partial u^1}{\partial r}\right] = 0 \quad (4a)$$

$$\left(\frac{\partial w^1}{\partial r} + \frac{\partial u^1}{\partial z}\right) = 0 \quad (4b)$$

y para $r = 0$, la ecuación (4a) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial w^1}{\partial z} + 2\left(1 - 2\left(\frac{v_s^1}{v_c^1}\right)^2\right) \frac{\partial u^1}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

donde el superíndice 1 identifica a la capa superior y el superíndice 2 identifica el semiespacio inferior.

En forma análoga, las condiciones de borde para la interfaz $z = z_i$ corresponden a:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial u^1}{\partial r} + \frac{1}{r}u^1 + \frac{\partial w^1}{\partial z}\right] - 2\left(\frac{v_s^1}{v_c^1}\right)^2 \left[\frac{1}{r}u^1 + \frac{\partial u^1}{\partial r}\right] \\ &= \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\left(\frac{v_c^2}{v_c^1}\right)^2 \left[\frac{\partial u^2}{\partial r} + \frac{1}{r}u^2 + \frac{\partial w^2}{\partial z}\right] - 2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\left(\frac{v_s^1}{v_s^2}\right)^2 \left[\frac{1}{r}u^2 + \frac{\partial u^2}{\partial r}\right] \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\frac{\partial w^1}{\partial r} + \frac{\partial u^1}{\partial z} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{\partial w^2}{\partial r} + \frac{\partial u^2}{\partial z}\right) \quad (6b)$$

$$u^1 = u^2$$

$$w^1 = w^2 \quad (6c)$$

Para el eje de simetría la ecuación (6a) adopta la siguiente forma:

$$\left[2\frac{\partial u^1}{\partial r} + \frac{\partial w^1}{\partial z}\right] - 4\left(\frac{v_s^1}{v_c^1}\right)^2 \frac{\partial u^1}{\partial r} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\left(\frac{v_c^2}{v_c^1}\right)^2 \left[2\frac{\partial u^2}{\partial r} + \frac{\partial w^2}{\partial z}\right] - 4\left(\frac{v_s^2}{v_c^1}\right)^2 \frac{\partial u^2}{\partial r} \quad (7)$$

3. TRATAMIENTO DE LA FUENTE

La fuente puntual de ondas P está localizada dentro de la capa, a lo largo del eje de simetría en el punto $(0, z_f)$. La fuente comienza a actuar en $t = 0$, provocando una variación en la tensión, durante un intervalo finito de tiempo y manteniendo finalmente un desplazamiento constante en cada partícula del medio para $t \rightarrow \infty$, como se observa en la Fig. 1a.

Con el objeto de tener segundas derivadas espaciales y temporales suaves, el potencial de desplazamiento que define a la fuente es considerado como una diferencia finita cuártica de una función de cuarto orden. Ilan & Lowenthal (1976) muestran que una fuente definida de esta forma tiene un menor contenido de altas frecuencias siendo la más apropiada para un esquema de diferencias finitas.

El potencial de desplazamiento de la fuente está dado por:

$$\phi_0(t) = \frac{1}{\Delta^4} [f_0(t) - 4f_0(t-\Delta) + 6f_0(t-2\Delta) - 4f_0(t-3\Delta) + f_0(t-4\Delta)] \quad (8)$$

con

$$f_0(t) = -\frac{C}{12R} \left(t - \frac{R}{v_c^1}\right)^4 H\left(t - \frac{R}{v_c^1}\right) \quad (9)$$

donde $R^2 = r^2 + (z - z_f)^2$, C es un factor de amplificación, H es la función de Heaviside y Δ es una constante que determina el período predominante generado por la fuente.

El campo de desplazamiento está relacionado con el potencial por

$$\vec{u} = \nabla \phi_0 \quad (10)$$

Aplicando la transformada de Fourier se obtiene su espectro en el dominio de frecuencias como el observado en la Fig. 1b. Nótese que en el límite $\Delta \rightarrow 0$, $\phi_0(t)$ se hace proporcional a la función de Heaviside, y los desplazamientos a la función delta de Dirac.

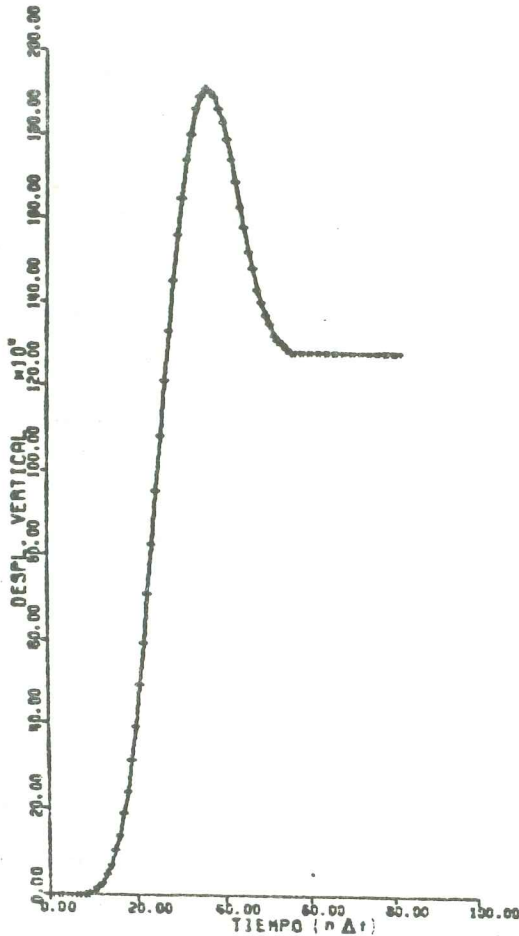


Fig. 1a Desplazamiento vertical de la fuente.

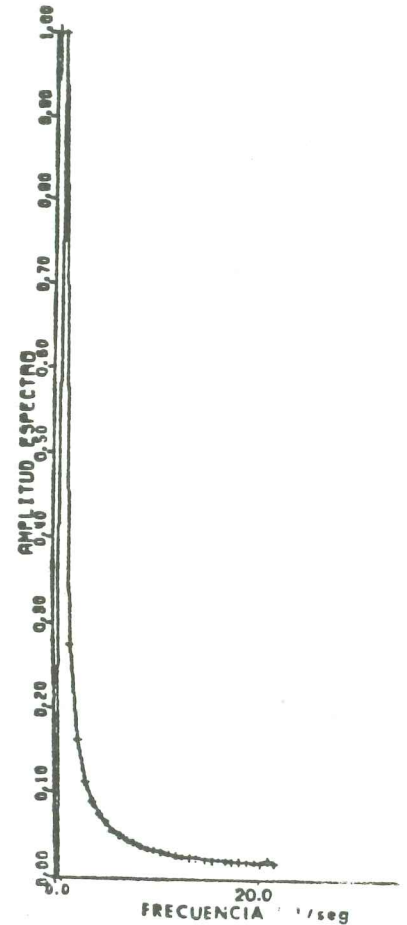


Fig. 1b Espectro de amplitud de la fuente.

4. FORMULACION DE DIFERENCIAS FINITAS

Las ecuaciones de movimiento pueden ser escritas en forma de diferencias finitas reemplazando las varias derivadas por sus aproximaciones centradas. La malla está impuesta en el plano $r-z$. Por conveniencia los tamaños de los incrementos espaciales Δr y Δz se han considerado iguales.

Colocando $r = m \Delta r$, $z = n \Delta z$, $y t = p \Delta t$, donde Δt es el incremento temporal, m, n, p son números enteros tales que $0 < m < M$, $0 < n < N$ y $0 < p < P$, se representan las componentes aproximadas de los desplazamientos en el punto de la malla $(m \Delta r, n \Delta z)$ en el tiempo $p \Delta t$ por $U_{m, n, p}$ y $W_{m, n, p}$:

Con esto las ecuaciones (2a) y (2b) se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 U_{m, n, p+1} = & 2U_{m, n, p} - U_{m, n, p-1} + \left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right)^2 [U_{m+1, n, p} - 2U_{m, n, p} + U_{m-1, n, p}] \\
 & + \frac{1}{2m} \left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right)^2 \cdot [U_{m+1, n, p} - U_{m-1, n, p}] - \frac{1}{m^2} \left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right)^2 U_{m, n, p} \\
 & + \frac{1}{4} \left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right)^2 \left(\frac{\Delta r}{\Delta z}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{v_s}{v_c}\right)^2\right] \cdot [W_{m+1, n, p} - W_{m+1, n-1, p} - W_{m-1, n+1, p} \\
 & + W_{m-1, n-1, p}] + \left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right)^2 \left(\frac{\Delta r}{\Delta z}\right)^2 \left(\frac{v_s}{v_c}\right)^2 [U_{m, n+1, p} - 2U_{m, n, p} + U_{m, n-1, p}]
 \end{aligned} \quad (11a)$$

En forma análoga:

$$\begin{aligned}
 W_{m, n, p+1} = & 2W_{m, n, p} - W_{m, n, p-1} + \left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right)^2 \left(\frac{\Delta r}{\Delta z}\right)^2 [W_{m, n+1, p} - 2W_{m, n, p} + W_{m, n-1, p}] \\
 & + \frac{1}{2m} \left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right)^2 \left(\frac{\Delta r}{\Delta z}\right) \cdot \left[1 - \left(\frac{v_s}{v_c}\right)^2\right] [U_{m, n+1, p} - U_{m, n-1, p}] \\
 & + \frac{1}{4} \left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right)^2 \left(\frac{\Delta r}{\Delta z}\right) \left[1 - \left(\frac{v_s}{v_c}\right)^2\right] [U_{m+1, n+1, p} - U_{m+1, n-1, p} - U_{m-1, n+1, p} \\
 & + U_{m-1, n-1, p}] + \frac{1}{2m} \left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right)^2 \left(\frac{v_s}{v_c}\right)^2 [W_{m+1, n, p} - W_{m-1, n, p}] \\
 & + \left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right)^2 \left(\frac{v_s}{v_c}\right)^2 [W_{m+1, n, p} - 2W_{m, n, p} + W_{m-1, n, p}]
 \end{aligned} \quad (11b)$$

y las ecuaciones (3a) y (3b) para el eje de simetría, es decir para $m = 0$, están dadas por:

$$U_{0, n, p+1} = 0 \quad (12a)$$

$$\begin{aligned}
 W_{0, n, p+1} = & 2W_{0, n, p} - W_{0, n, p-1} + \left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right)^2 \left(\frac{\Delta r}{\Delta z}\right)^2 \cdot [W_{0, n+1, p} - 2W_{0, n, p} + W_{0, n-1, p}] \\
 & + \left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right)^2 \left(\frac{\Delta r}{\Delta z}\right) \cdot \left[1 - \left(\frac{v_s}{v_c}\right)^2\right] [U_{1, n+1, p} - U_{1, n-1, p}] \\
 & + 4 \left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right)^2 \left(\frac{v_s}{v_c}\right)^2 \cdot [W_{1, n, p} - W_{0, n, p}],
 \end{aligned} \quad (12b)$$

donde se ha considerado que u y w son regulares en el entorno de $r = 0$, de modo que

$$U_{-1, n, p} = -U_{1, n, p} \quad (13)$$

$$W_{-1, n, p} = W_{1, n, p}$$

Las ecuaciones correspondientes a las condiciones de borde en la superficie libre, exigen la generación de una línea ficticia ($n = -1$) sobre la superficie física ($n = 0$), y en este caso las ecuaciones (4a) y (4b) adoptan la siguiente forma:

$$U_{m, -1, p} = U_{m, 1, p} + \left(\frac{\Delta z}{\Delta r}\right) [W_{m+1, 0, p} - W_{m-1, 0, p}] \quad (14a)$$

$$W_{m,-1,p} = W_{m,1,p} + \left(\frac{\Delta z}{\Delta r}\right) \left[1 - 2\left(\frac{v_{s1}}{v_{c1}}\right)^2\right] [U_{m+1,0,p} - U_{m-1,0,p}] + \frac{2}{m} \left(\frac{\Delta z}{\Delta r}\right) \left[1 - 2\left(\frac{v_{s1}}{v_{c1}}\right)^2\right] U_{m,0,p} \quad (14b)$$

En el eje, es decir para $m = 0$, las ecuaciones (3a) y (5) se pueden escribir como:

$$U_{0,-1,p} = 0 \quad (15a)$$

$$W_{0,-1,p} = W_{0,1,p} + 4\left(\frac{\Delta z}{\Delta r}\right) \left[1 - 2\left(\frac{v_{s1}}{v_{c1}}\right)^2\right] U_{1,0,p} \quad (15b)$$

El conjunto de las ecuaciones (14) y (15) permiten calcular los valores de U y W para cualquier instante de tiempo p sobre la línea ficticia $n = -1$. Conocidos los valores sobre esta línea, es posible usar las ecuaciones (11) y (12) sobre la superficie libre $n = 0$.

En forma análoga, las ecuaciones correspondientes a las condiciones de borde en la interfaz obligan al uso de una línea ficticia que se extiende al medio inferior, pero que conserva las características del medio superior, y en este caso las ecuaciones que nos permiten calcular U y W sobre esta línea ficticia $n = N_0 + 1$ están dadas por:

$$U_{m,N_0+1,p}^1 = \left[1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\right] U_{m,N_0+1}^1 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) U_{m,2,p}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta z}{\Delta r}\right) \left[1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\right] [W_{m+1,N_0,p}^1 - W_{m-1,N_0,p}^1] \quad (16a)$$

$$W_{m,N_0+1,p}^1 = \left[1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \left(\frac{v_{c2}}{v_{c1}}\right)^2\right] W_{m,N_0,p}^1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \left(\frac{v_{c2}}{v_{c1}}\right)^2 W_{m,2,p}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta z}{\Delta r}\right) \left[\left[1 - 2\left(\frac{v_{s1}}{v_{c1}}\right)^2\right] - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \left[\left(\frac{v_{c2}}{v_{c1}}\right)^2 - 2\left(\frac{v_{s2}}{v_{c1}}\right)^2 \right] \right] [U_{m+1,N_0,p}^1 - U_{m-1,N_0,p}^1 + \frac{2}{m} U_{m,N_0,p}^1] \quad (16b)$$

En el eje $m = 0$:

$$U_{0,N_0+1,p}^1 = 0 \quad (17a)$$

$$W_{0,N_0+1,p}^1 = \left[1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \left(\frac{v_{c2}}{v_{c1}}\right)^2\right] W_{0,N_0,p}^1 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \left(\frac{v_{c2}}{v_{c1}}\right)^2 W_{0,2,p}^2 - 2 \left(\frac{\Delta z}{\Delta r}\right) \left[\left[1 - 2\left(\frac{v_{s1}}{v_{c1}}\right)^2\right] - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \left[\left(\frac{v_{c2}}{v_{c1}}\right)^2 - 2\left(\frac{v_{s2}}{v_{c1}}\right)^2 \right] \right] U_{1,N_0,p}^1 \quad (17b)$$

5. PROCEDIMIENTO DE CALCULO

La fuente utilizada posee una discontinuidad infinita en el punto $(0, z_f)$, por lo tanto, en dicho entorno se pierde precisión en el cálculo de las derivadas parciales formuladas en términos de diferencias finitas, debido a que las componentes del desplazamiento son muy grandes.

Para evitar este problema la fuente es rodeada por una región cilíndrica finita en donde es calculada la fuente y a través de sus bordes es traspasada la información al medio que la rodea.

El esquema del procedimiento del cálculo es el siguiente:

- Primero se definen dos regiones de cálculo: la región I, que contiene a la fuente, que está definida en el apartado (2), y que tiene por límite el borde L_1 Fig. 2, y la región II que corresponde al medio que rodea a la región I y que posee un límite interno L_2 . Ambas regiones se fusionan a través de las condiciones de borde establecidas en L_1 y L_2 , las que además suprimen las reflexiones generadas por dichos bordes fijos.

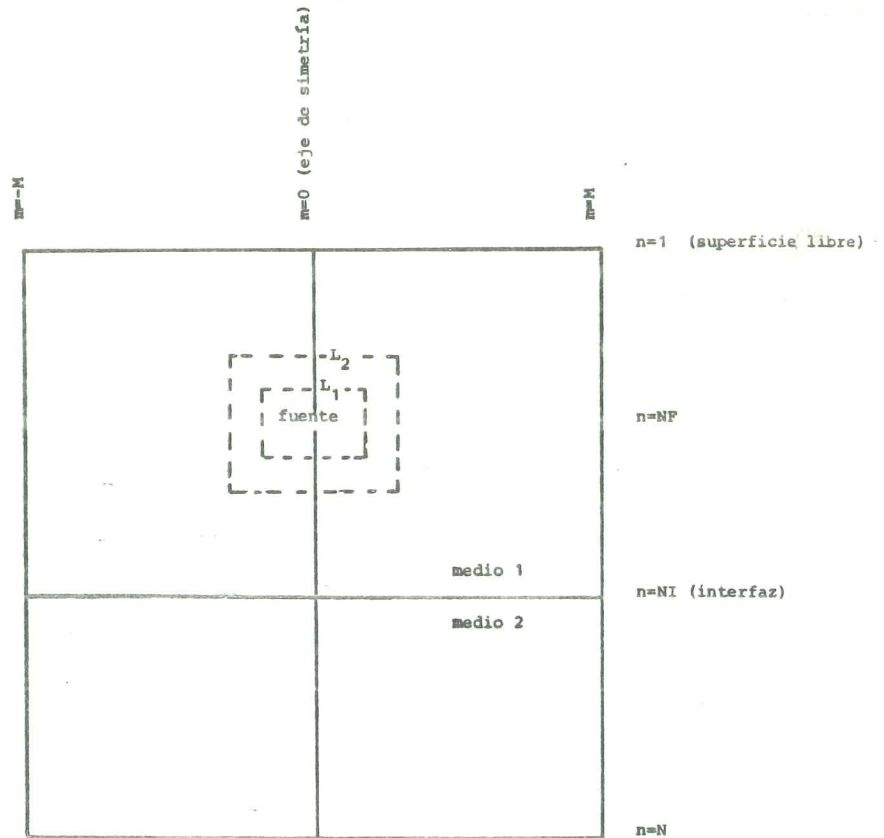


Fig. 2 Malla utilizada; $m = 1, M$; $n = 1, N$; NI corresponde a la interfaz, NF a la profundidad de la fuente; L_1 y L_2 definen los límites de las regiones I y II de cálculo.

- Llamando UF, WF a las componentes radial y vertical del desplazamiento generado por la fuente, UR, WR a las reflexiones generadas por la superficie libre y la interfaz, para $t = 0$:

$$\begin{aligned} UR &= WR = 0 \\ U &= W = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

- En la región I se utilizan las ecuaciones (II) para calcular los UR y WR, usando como condición de borde en L_2 .

$$\begin{aligned} UR &= U - UF \\ WR &= W - WF \end{aligned} \quad (19)$$

Si se desea conocer U y W en la región I, es necesario agregar los UF y WF calculados analíticamente (esto no puede hacerse en la fuente, donde $R = 0$); en particular, esto es necesario en L_1 , pues allí se requiere conocer U y W como condición de borde para la región I.

- En la región II se calculan U y W usando las ecuaciones (II), con las características elásticas correspondientes al medio donde se ubique el punto, se imponen las condiciones de borde en la superficie libre y en la interfaz. Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} U &= UF \\ W &= WF \end{aligned} \quad (20)$$

- Del cálculo de U y W en la región II se obtienen las condiciones para la región I restando en L_2 UF y WF de los valores de U y W obtenidos.

La continuidad espacial entre la región I y II se logra por medio de las condiciones de borde entrelazadas que se inician con la ecuación (18) en I y con la ecuación (20) en la región II.

En resumen tenemos:

- i) En $p = -1$ se imponen los valores U y W idénticamente nulos en todos los puntos de la malla.
- ii) En $p = 0$ los desplazamientos son sólo debidos a la fuente (ec. 20) y las reflexiones son nulas (ec. 18).
- iii) Para tiempos posteriores $p = 1, 2, \dots, P$, el orden de ejecución es el siguiente:
 - 1° Sobre L_2 se calculan las componentes de las reflexiones UR y WR imponiendo la ecuación (19).
 - 2° En la región I se calculan los UR y WR mediante las ecuaciones (11) de propagación usando como condición de borde, las reflexiones calculadas en L_2 según el punto anterior. Sobre el eje de simetría se utilizan las ecuaciones (12).
 - 3° Sobre L_1 se calculan las componentes del desplazamiento U y W usando la ecuación (19).
 - 4° Se imponen las condiciones de borde de la superficie libre (ecs. 14 y 15) y las de la interfaz (ecs. 16 y 17).
 - 5° En la región II se calculan los componentes del desplazamiento U y W usando las ecuaciones (11) y (12) donde se utilizan los desplazamientos calculados en L_1 según el tercer punto.

Este proceso se repite pasando $p \rightarrow p+1$ hasta alcanzar la condición final.

El criterio de estabilidad utilizado corresponde a:

$$\left(\frac{v_c \Delta t}{\Delta r}\right) < \left[1 + \left(\frac{v_s}{v_c}\right)^2\right]^{-1/2} \quad (21)$$

cuyo desarrollo se presenta en la publicación de Alterman & Lowenthal (1970).

Finalmente para evitar los problemas relacionados con dispersión de grilla, se impuso un número mínimo de 10 puntos de la malla por longitud de onda, en la frecuencia dominante del espectro de potencia de la fuente, lo que corresponde al criterio utilizado en problemas numéricos semejantes al nuestro (Alford, Keller y Boore, 1974).

6. CONDICIONES DE BORDE TRANSPARENTE

Las condiciones de borde sugeridas por Smith (1974) requieren de superposición de dos soluciones S1 y S2, para cancelar los efectos de las reflexiones generadas por la frontera lateral $m = M$.

La solución S1 se obtiene imponiendo, en dicha frontera, desplazamientos normales nulos y tensiones tangenciales nulas de modo que las ecuaciones (2) adquieren la siguiente forma:

$$u = 0 \quad (22a)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(\frac{v_s}{v_c}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{1}{v_{c2}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (22b)$$

La solución S2, por su parte, impone desplazamiento tangencial y tensiones normales nulas sobre la frontera, y, en este caso, las ecuaciones (2) se transforman en:

$$w = 0 \quad (23a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{u}{r^2} + \left(\frac{v_s}{v_c}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v_{c2}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (23b)$$

En su publicación, Smith (1974) muestra analíticamente cómo ambas soluciones presentan un desfase en oposición en la parte correspondiente a las reflexiones, de suerte que la superposición de ellas elimina las contribuciones espurias de las reflexiones laterales.

La formulación e implementación en diferencias finitas de las ecuaciones (22) y (23) obedece a la misma técnica planteada anteriormente.

Si se analiza el caso de una fuente ubicada a $6 \Delta z$ de profundidad, en una malla de $20 \Delta r \times 60 \Delta r$ con una interfaz a $20 \Delta z$ de la superficie, con $v_{c1} = 1.33$ km/seg y $v_{c2} = 2.0$ km/seg. Considerando ($\lambda = \mu$), $\Delta = 0.2$ seg, $\Delta r = \Delta z = 0.1$ km, $\Delta t = 0.03$ seg, los resultados se pueden observar en la Fig. 3, se aprecia la eficiencia del método propuesto por Smith (1974).

La Fig. 3a muestra los desplazamientos radiales, productos de la solución S1 (ec. 22); en forma análoga, la Fig. 3b corresponde a dichos desplazamientos según la solución S2 (ec. 23); la Fig. 3c representa la superposición de las soluciones S1 y S2, las que pueden compararse con la Fig. 3d que corresponde al caso en que se ha alejado el borde lateral en $20 \Delta r$, imponiendo condiciones de borde rígidas sobre éste.

7. ANALISIS DE RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos con una malla de $30 \Delta r \times 60 \Delta r$, con una profundidad de la fuente y de la interfaz de $15 \Delta z$ y $30 \Delta z$, respectivamente; $v_{c1} = 1.33$ km/seg, $v_{c2} = 2.0$ km/seg, ($\lambda = \mu$), $\Delta r = \Delta z = 0.1$ km, $\Delta t = 0.03$ seg, $\Delta = 0.2$ seg.

Inicialmente se impuso condiciones de borde rígidas en la frontera lateral para una posterior comparación con las condiciones de borde de Smith.

En las Figs. 4a y 4b se muestran los desplazamientos verticales y radiales en el epicentro y a distancias de $5 \Delta r$, $10 \Delta r$, $15 \Delta r$, $20 \Delta r$, $25 \Delta r$ y $30 \Delta r$ de éste, todos ellos en superficie.

En las Figs. 4 y 5 se puede apreciar la disminución de amplitud de la primera llegada (onda P) en función de la distancia al epicentro debido a atenuación geométrica.

En la Fig. 4a se puede distinguir claramente la llegada de la onda P que se reflejó en la interfaz como onda P (P_1P) y la llegada de la contribución de la onda reflejada en el borde rígido lateral (BR). Evidentemente, estas reflexiones se pueden distinguir en forma más clara en la Fig. 4b correspondiente a la componente radial de los desplazamientos.

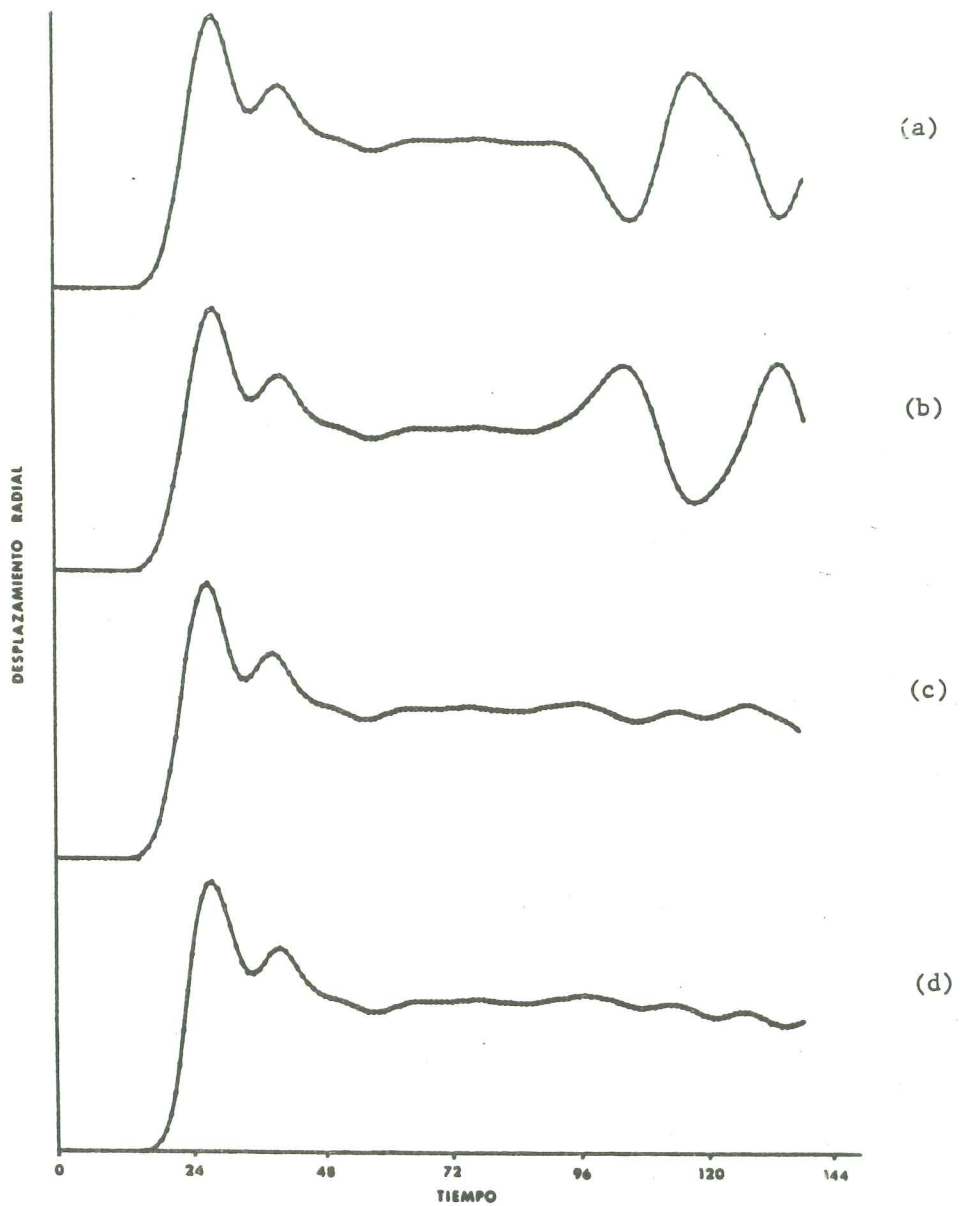


Fig. 3 Desplazamiento radial.

- a) Solución S1.
- b) Solución S2.
- c) Superposición de S1 y S2.
- d) Comparación con frontera rígida lateral alejada

Fig. 4(a) Desplazamientos verticales en superficie con condiciones de borde laterales rígidas.

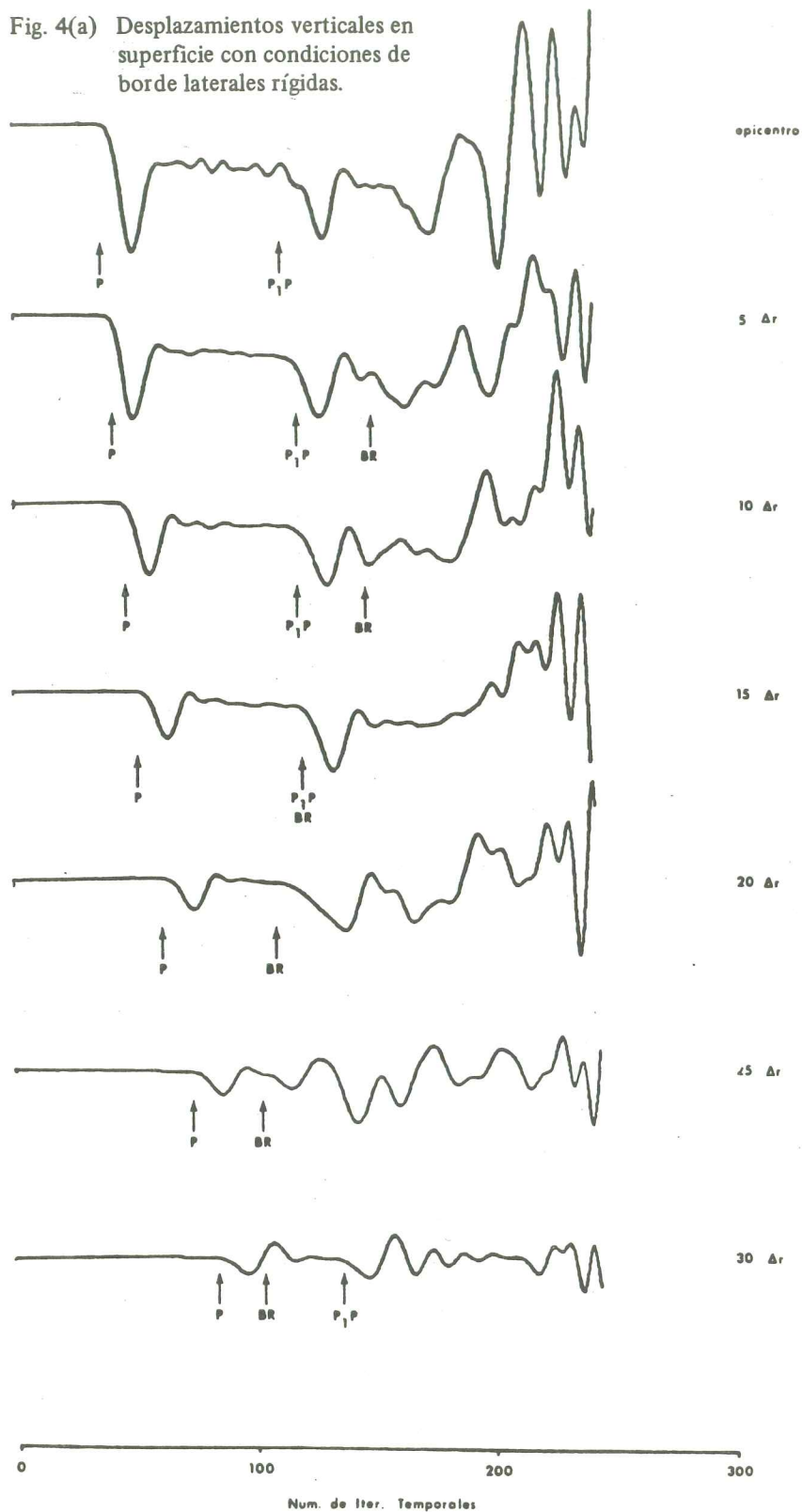


Fig. 4(b) Desplazamientos radiales en superficie con condiciones de borde laterales rígidas.

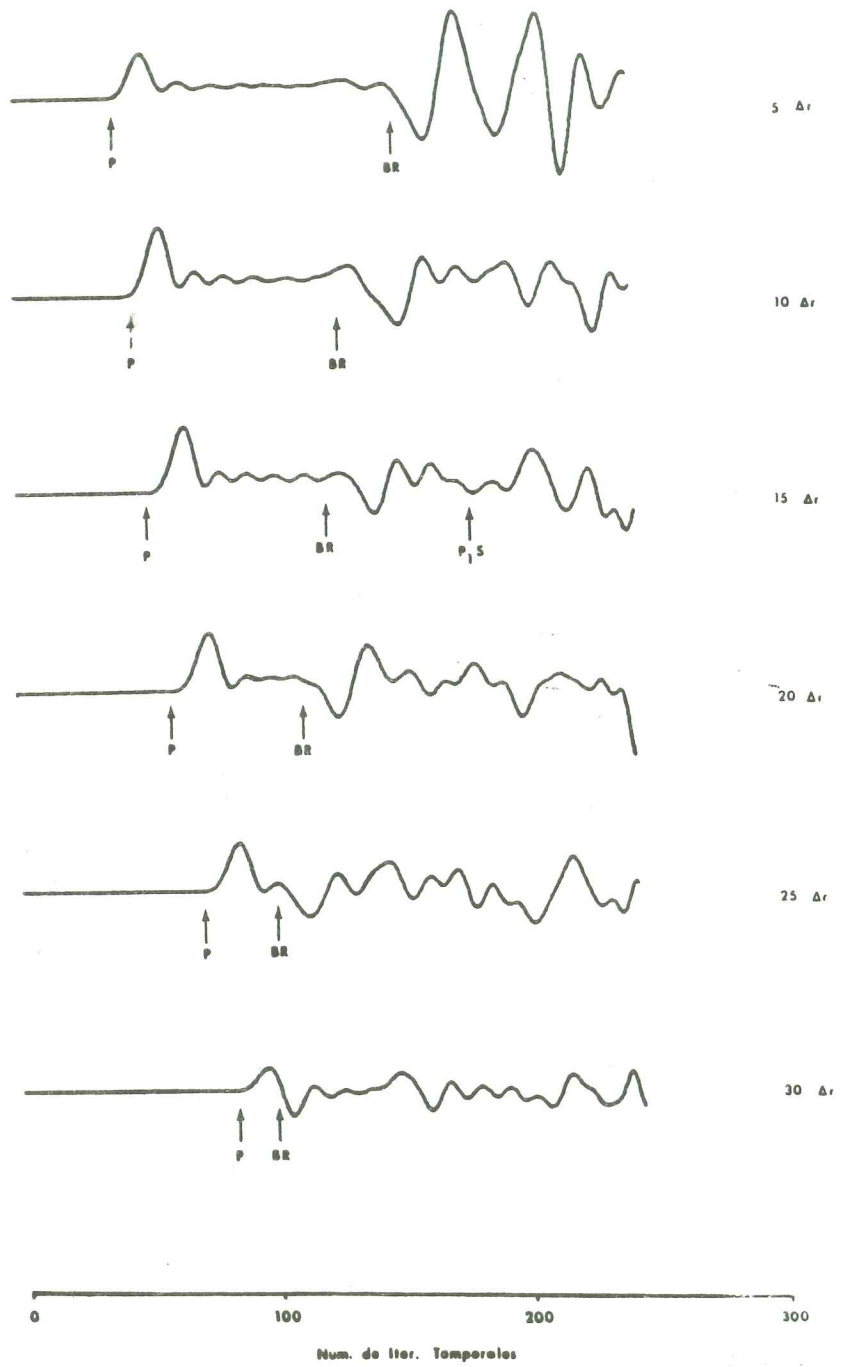


Fig. 5(a) Desplazamientos verticales en superficie con condiciones de borde transparentes. La fase $P_{01}P$ corresponde en la onda P que se reflejó en superficie y en la interfaz.

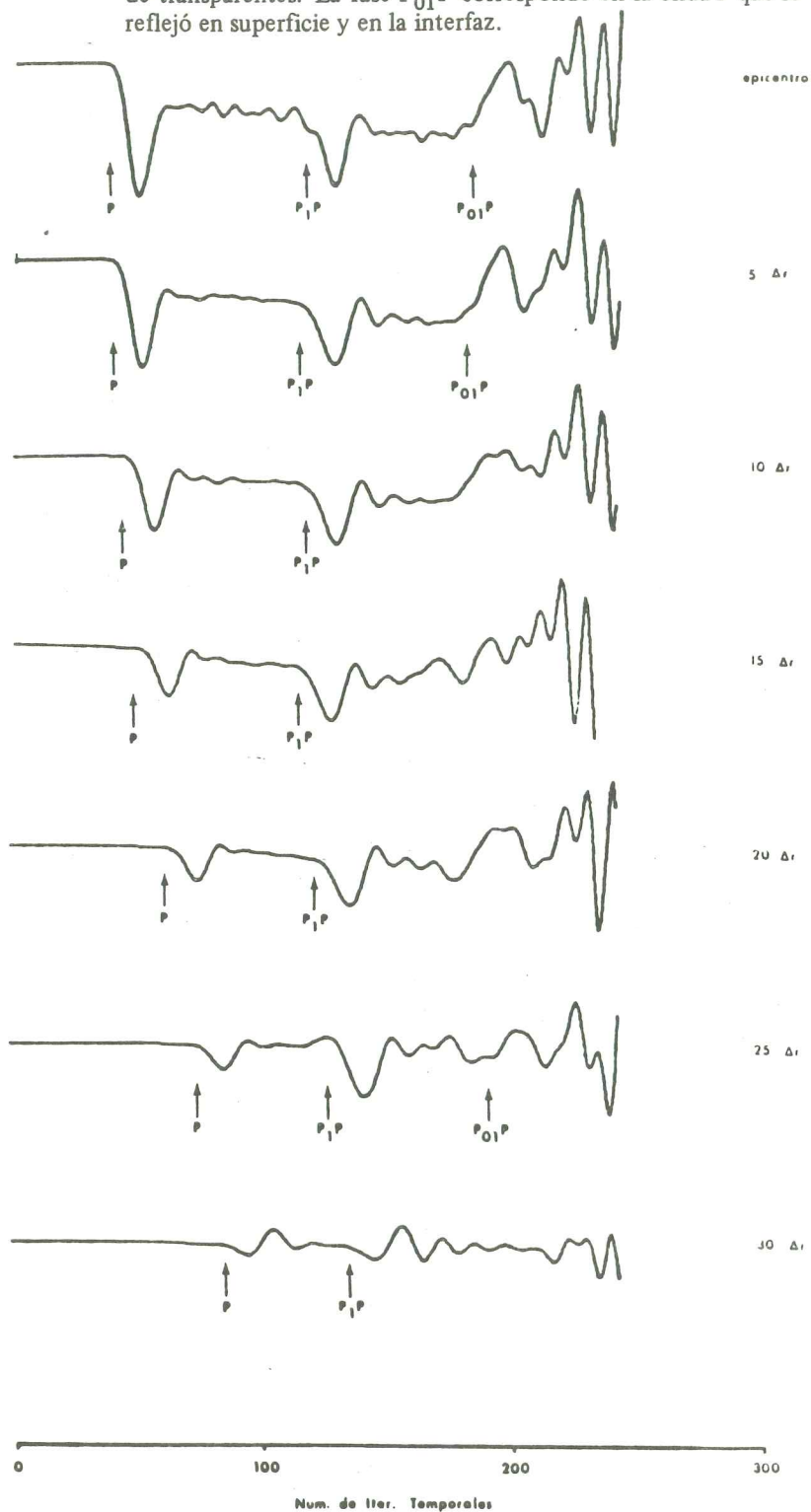
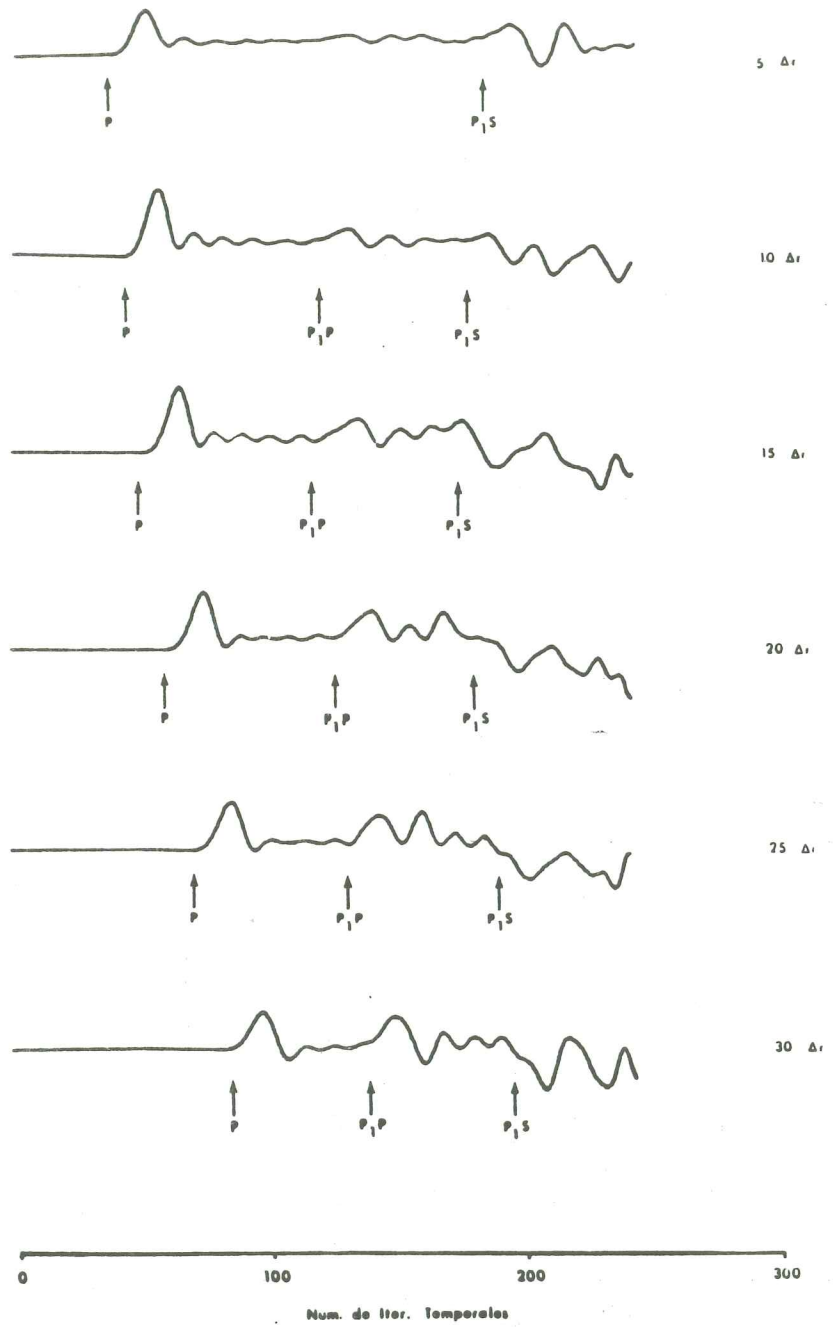


Fig. 5(b) Desplazamientos radiales en superficie con condiciones de borde transparentes.



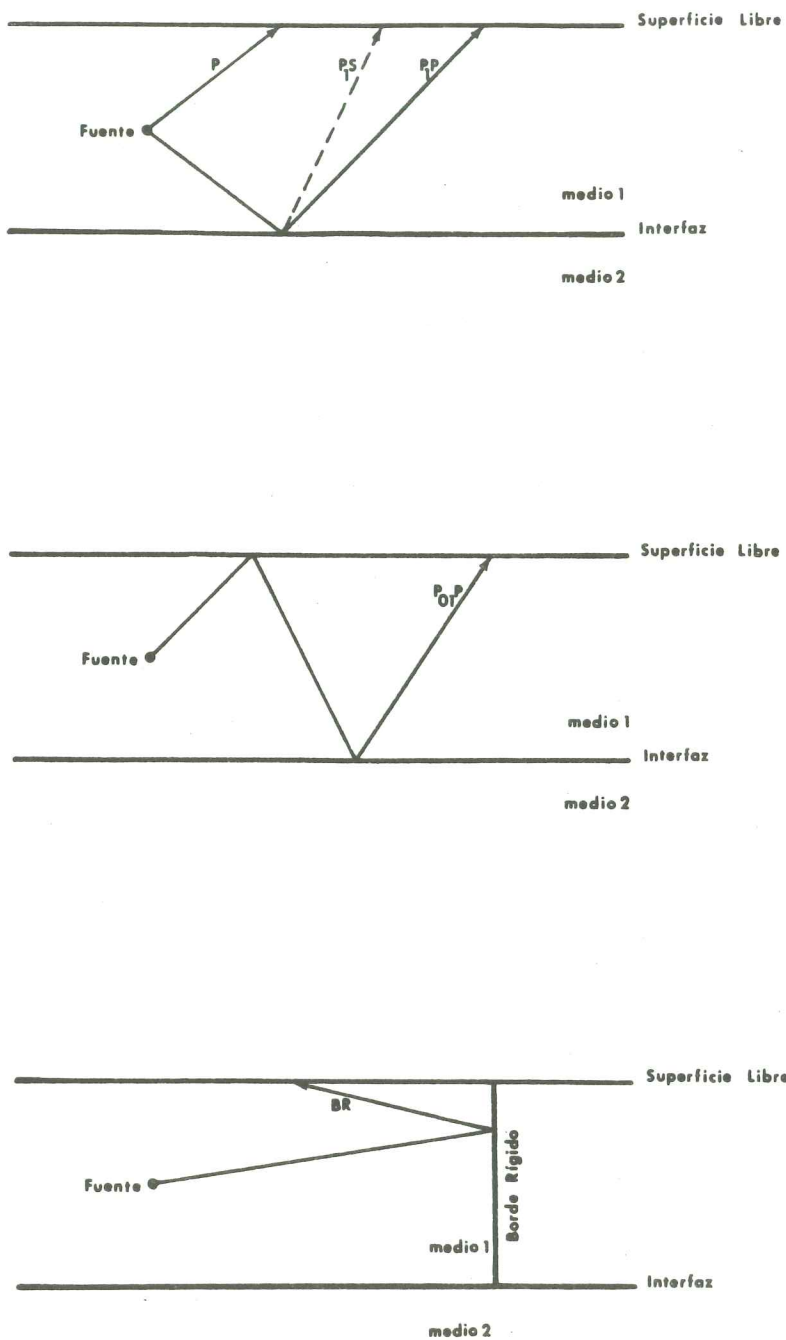


Fig. 6 Representación esquemática de las diferentes fases observadas en los sismogramas sintéticos.

Las Figs. 5a y 5b corresponden a los desplazamientos verticales y radiales a las mismas distancias epicentrales que las Figs. 4a y 4b. Notamos que las fases son más claras de distinguir; por ejemplo, el sismograma correspondiente a $5 \Delta r$ del epicentro, con las condiciones de borde de Smith, nos permite identificar claramente la onda P que se reflejó en la interfaz como S, ($P_1 S$), lo que era imposible de hacer en su análogo con condiciones de borde rígidas. La Fig. 6 muestra esquemáticamente el significado de las ondas $P_1 P$, $P_1 S$, $P_{01} P$ y BR.

La implementación de las condiciones de borde de Smith es simple y, aunque significa un costo doble en computación con respecto a las de borde rígido, los resultados justifican ampliamente su uso, puesto que significa independizarse del tamaño de la malla a utilizar.

8. CONCLUSIONES

El modelo de Alterman & Karal (1968) ha sido adecuadamente reproducido lo que significa contar con una poderosa herramienta numérica en la producción de sismogramas sintéticos. Aunque la geometría cilíndrica conlleva algunas limitaciones, es posible utilizarlo en casos de estructuras más complejas.

Las condiciones de borde de Smith (1974) anulan eficientemente las reflexiones producidas por el tamaño finito del dominio de cálculo.

A pesar del ahorro en puntos de cálculo debido a la simetría cilíndrica, el tiempo de computación en un computador IBM 370 es de 30 minutos CPU para el caso de una malla de $30 \Delta r \times 60 \Delta z$ y 250 pasos temporales.

9. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue parcialmente financiado por el Fondo Nacional de Ciencias y Tecnología a través del Proyecto N° 1158.

10. REFERENCIAS

- ALFORD, R.M., KELLER, K.R. AND BOORE D.N., 1974. "Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation". *Geophysics*, Vol. 39, pp. 834-842.
- ALTERMAN, Z.S. AND KARAL F.C. JR., 1968. "Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods". *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 58, pp. 367-398.
- ALTERMAN, Z.C. AND LOWENTHAL, D., 1970: "Seismic waves in a quarter and three-quarter plane". *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, Vol. 20, pp. 101-126.
- ILAN, A. AND LOWENTHAL, D., 1976. "Instability of finite difference schemes due to boundary conditions in elastic media". *Geophys. Prop.*, Vol. 24, pp. 431-453.
- SMITH, WARWICK D., 1974. "A non reflecting plane boundary for wave propagation problems". *J. Comp. Geophysics*, Vol. 15, pp. 492-503.